Planche n° 14. Trigonométrie hyperbolique

* très facile ** facile *** difficulté moyenne **** difficile
I : Incontournable T : pour travailler et mémoriser le cours

Exercice n° 1 (*IT)

Etablir pour ch, sh et th les formules d'addition, de duplication et de linéarisation.

Exercice n° 2 (**)

Etudier $f : x \mapsto \ln(\text{ch}\, x) - x$. Montrer en particulier que la droite $\mathscr{D}$ d'équation $y = -2x - \ln 2$ est asymptote au graphe de f en $-\infty$ (on dit que la droite d'équation $y = ax + b$ est asymptote au graphe de f en $-\infty$ si et seulement si $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) - (ax + b) = 0$. Construire le graphe de f et la droite $\mathscr{D}$.

Exercice n° 3 (**)

Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $\text{sh}(2 + x) + \text{sh}(2 + 2x) + \ldots + \text{sh}(2 + 100x) = 0$.

Exercice n° 4 (I)**

1) Montrer que pour tout réel x non nul, on a : $\text{th}\, x = \dfrac{2}{\text{th}(2x)} - \dfrac{1}{\text{th}\, x}$.

2) En déduire la valeur de $u_n = 2^0\, \text{th}\left(2^0 x\right) + 2^1\, \text{th}\left(2^1 x\right) + \ldots + 2^n\, \text{th}\left(2^n x\right)$ pour n entier naturel et x réel non nul donnés puis calculer la limite de la suite (u_n).

Exercice n° 5 (*I)** (définition de argsh, argch et argth)

1) a) Montrer que sh est une bijection de $\mathbb{R}$ sur $\mathbb{R}$. On note argsh la fonction réciproque (argument sinus hyperbolique).

b) Construire le graphe de argsh.

c) Déterminer une expression simple de l'argument sinus hyperbolique d'un nombre (ou encore résoudre l'équation $\text{argsh}\, x = y$ d'inconnue x et de paramètre y).

d) Etudier la dérivabilité de argsh et déterminer sa dérivée.

2) a) Montrer que ch réalise une bijection de $[0, +\infty[$ sur un intervalle à préciser. On note argch la fonction réciproque (argument cosinus hyperbolique).

b) Construire le graphe de argch.

c) Déterminer une expression simple de l'argument cosinus hyperbolique d'un nombre.

d) Etudier la dérivabilité de argch et déterminer sa dérivée.

3) a) Montrer que th réalise une bijection de $\mathbb{R}$ sur un intervalle à préciser. On note argth la fonction réciproque (argument tangente hyperbolique).

b) Construire le graphe de argth.

c) Déterminer une expression simple de l'argument tangente hyperbolique d'un nombre.

d) Etudier la dérivabilité de argth et déterminer sa dérivée.

Exercice n° 6 (**)

Simplifier les expressions suivantes

1) $\ln\left(\sqrt{x^2+1} + x\right) + \ln\left(\sqrt{x^2+1} - x\right)$.

2) $\dfrac{\text{ch}(\ln x) + \text{sh}(\ln x)}{x}$.

3) $\text{sh}^2 x \cos^2 y + \text{ch}^2 x \sin^2 y$.

Exercice n° 7 (**)

Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes :

1) $\text{ch}\, x = 2$

2) $\text{ch}\, x = \dfrac{1}{2}$.

3) $\operatorname{th} x = a$, a réel donné.

Exercice n° 8 (**)

Calculer $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \operatorname{ch}(ak+b)$, $((a,b) \in \mathbb{R}^2,\ n \in \mathbb{N})$.

Exercice n° 9 (***)

Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $a \operatorname{ch} x + b \operatorname{sh} x = c$ en discutant en fonction des paramètres réels a, b et c.